Inleveropdracht 1 (Wiskunde 2)
najaar 2024

⋆ Deadline voor het inleveren van deze opgave:
WOENSDAG 2 oktober 2024 9:45-10:00 (pauze hoorcollege)

⋆ Vergeet niet je naam en studentennummer te vermelden.
⋆ Iedere student levert eigen uitwerkingen in.
⋆ Niet alleen antwoorden geven! (uitleg en/of berekeningen zijn belangrijk)
⋆ **Beantwoord de opdrachten A, B en C op een afzonderlijk vel!**
⋆ Inzendingen via email worden **niet** geaccepteerd, *tenzij* hierover van tevoren contact is geweest.

Opdracht A ↔ *Les 1 en Les 2* **(35 punten)**

a) De trillings-verdelingsfunctie van een harmonische oscillator als functie van de temperatuur T wordt gegeven door de oneindige reeks:

$$q_V(T) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{j\theta_V}{T}},$$

waarbij $\theta_V = \frac{\hbar v_e}{k}$ een (constante) trillingstemperatuur representeert.[1]
Laat zien dat deze reeks een *convergente* meetkundige reeks is en bepaal de waarde van deze reeks.

b) De toestandsvergelijking van een gas kan worden uitgedrukt m.b.v. de volgende reeks:

$$pV = nRT \sum_{j=0}^{\infty} B_j(T) \left(\frac{n}{V}\right)^j,$$

waarbij de B_j de zogenaamde viriale coëfficiënten zijn.[2]

Bepaal de eerste drie termen B_0, B_1 en B_2 van de reeks in de volgende twee situaties:

[1] met de constante van Planck $\hbar$, de Boltzmann constante k en gemiddelde snelheid v_e.
[2] met volume V, druk p, het aantal mol n en de molaire gasconstante R.

voorgesteld door Van der Waals (1873)[3]:

$$(p + \frac{n^2 a}{V^2})(V - nb) = nRT$$

en

een aanpassing hiervan, voorgesteld door Dieterici (1899):

$$p(V - nb) = nRT\mathrm{e}^{-\frac{an}{RTV}}.$$

Opdracht B $\leftrightarrow$ *Les 3 en Les 4* (30 punten)

a) Schets de grafiek van de volgende periodieke functie (periode=12) op het interval $x \in [-6, 6]$:

$$h(x) = \begin{cases} -x(x+6) & x \in (-6, 0), \\ -x(x-6), & x \in (0, 6). \end{cases}$$

Bepaal ook de Fourier-reeks van de functie $h(x)$.

b) Bereken de Fourier-integraal representatie van de volgende functie:

$$k(x) = \begin{cases} -2 - x, & x \in (-2, -1), \\ x, & x \in (-1, 1), \\ 2 - x, & x \in (1, 2), \\ 0, & \text{elders.} \end{cases}$$

Maak een schets van de functie $k(x)$ en van zijn Fourier-integraal.

c) Laat zien dat de volgende eigenschap geldt voor de Fourier transformatie[4]:

$$\mathcal{F}(f^{(3)}(x)) = -\mathrm{i}\,\omega^3 \mathcal{F}(f(x)).$$

[3] a en b zijn ook constanten.

[4] met $f^{(3)}(x)$ wordt de derde afgeleide van de functie $f(x)$ bedoeld en i staat voor het complexe getal $\sqrt{-1}$.

Opdracht C $\leftrightarrow$ *Les 5 en Les 6* (35 punten)

Gegeven is het *vierde*-orde beginwaarde-probleem:

$$y''''(x) - y(x) = 2\cos(x), \tag{1}$$

met beginvoorwaarden:

$$y(0) = 6,\ y'(0) = 3,\ y''(0) = -1 \text{ en } y'''(0) = -5. \tag{2}$$

a) Bepaal de algemene oplossing $y_h(x)$ van de *homogene* vergelijking horend bij differentiaalvergelijking (DV) (1).

b) Zoek een *particuliere* oplossing $y_p(x)$ van DV (1) met behulp van de methode van onbepaalde coëfficiënten.

c) Bepaal de oplossing $y(x)$ van (1) die aan de vier beginvoorwaarden (2) voldoet.