

Inleveropdracht 1 (Wiskunde 2)

najaar 2025

★ Deadline voor het inleveren van deze opgave:

WOENSDAG 1 oktober 2025 9:45-10:00 (pauze hoorcollege)

★ Vergeet niet je naam en studentnummer te vermelden.

★ Iedere student levert eigen, **met een blauwe pen geschreven**, uitwerkingen in, d.w.z. geen getypte, ook geen gescande, uitwerkingen: svp op A4-formaat inleveren!

★ Geef niet alleen antwoorden! (uitleg en/of berekeningen zijn belangrijk)

★ **Beantwoord de opdrachten A, B en C op een afzonderlijk vel!**

★ Inzendingen via email worden **niet** geaccepteerd, *tenzij* hierover van tevoren contact is geweest.

Opdracht A $\leftrightarrow$ Les 1 en Les 2 (40 punten)

a) Bepaal, zonder de afzonderlijke termen daadwerkelijk op te tellen:

$$\sum_{m=1}^{100} [4(m-1) + 3].$$

b) Bereken, rond het punt 1 op de x -as, de Taylorontwikkeling tot en met de vierde afgeleide term van de functie $f(x) = e^{-x^2}$:

$$f(x) \approx T_4(x) = c_0 + c_1(x-1) + \dots + c_4(x-1)^4.$$

(d.w.z. bepaal de coëfficiënten $c_0, \dots, c_4$)

c) Schets op het interval $[-1, 3]$ in één figuur, samen met de grafiek van $f(x)$ uit onderdeel b), de vijf grafieken van de Taylorpolynoom benaderingen:

$$T_0(x) = c_0, T_1(x) = c_0 + c_1(x-1), T_2(x) = \dots, T_3(x) = \dots, T_4(x).$$

d) Geef de algemene Taylorontwikkeling van een functie $g(x, y, z)$ rond een punt (a, b, c) tot en met de tweede afgeleide termen.

e) Pas onderdeel d) toe op de functie $g(x, y, z) = \sin(xy + z)$ rond het punt $(0, 0, 0)$.

Opdracht B $\leftrightarrow$ Les 3 en Les 4 (30 punten)

a) Schets de grafiek van de volgende (periodieke)¹ functie met periode 12 op het interval $-6 \leq x \leq 6$:

$$h(x) = \begin{cases} -x(x+6), & -6 \leq x \leq 0, \\ -x(x-6), & 0 \leq x \leq 6. \end{cases}$$

✂✂✂ Bepaal ook de Fourier-reeks van de functie $h(x)$.

b) Bereken de Fourier-integraal representatie van de functie:

$$k(x) = \begin{cases} -2-x, & -2 < x < -1, \\ x, & -1 < x < 1, \\ 2-x, & 1 < x < 2, \\ 0, & \text{elders.} \end{cases}$$

c) Laat zien dat de volgende eigenschap geldt voor de Fourier transformatie²:

$$\mathcal{F}(f^{(5)}(x)) = i \omega^5 \mathcal{F}(f(x)).$$

¹De periodieke functie krijg je door $h(x)$ periodiek uit te breiden.

²met $f^{(5)}(x)$ wordt de vijfde afgeleide van de functie $f(x)$ bedoeld en i staat voor het complexe getal $\sqrt{-1}$.

Opdracht C $\leftrightarrow$ Les 5 en Les 6 (30 punten)

Gegeven is het *vierde*-orde *begin*waardeprobleem:

$$y''''(t) - 2y''(t) + y(t) = t^2 + 2t + 1, \quad (1)$$

met beginvoorwaarden:

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0. \quad (2)$$

- a) Bepaal de algemene oplossing $y_h(t)$ van de *homogene* vergelijking horend bij differentiaalvergelijking (DV) (1).
- b) Zoek een *particuliere* oplossing $y_p(t)$ van DV (1) met behulp van de methode van onbepaalde coëfficiënten.
- c) Bepaal de oplossing $y(t)$ van (1) die aan de vier beginvoorwaarden (2) voldoet.