Inleveropdracht 2 (Wiskunde 2)
najaar 2024

⋆ Deadline voor het inleveren van deze opgave:
WOENSDAG 23 oktober 2024 10:00 (in de pauze van het hoorcollege)

⋆ Vergeet niet je naam en studentennummer te vermelden.
⋆ Iedere student levert eigen uitwerkingen in.
⋆ Geef niet alleen de antwoorden! (uitleg en/of berekeningen zijn belangrijk)
⋆ **Beantwoord de opdrachten A1, A2, B en C op aparte vellen!**
⋆ Inzendingen via email worden **niet** geaccepteerd, *tenzij* hierover van tevoren contact is geweest.

Opdracht A1 ↔ *Les 7 en Les 8* (20 punten)

Beschouw het stelsel niet-lineaire differentiaalvergelijkingen (DV-en):

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(1 - x^2 - y^2), \\ \dot{y} = x + y(1 - x^2 - y^2). \end{cases} \tag{1}$$

a) Bereken het stationaire (kritieke) punt van dit stelsel[1].

b) Wat is het karakter van dit stationaire punt (na linearisatie)?

c) Laat zien dat stelsel (1), gebruikmakend van poolcoördinaten

$$\begin{cases} x = r\cos(\varphi), \\ y = r\sin(\varphi), \end{cases}$$

geschreven kan worden als:

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1 - r^2), \quad r \geq 0, \quad r^2 = x^2 + y^2 \geq 0, \\ \dot{\varphi} = 1, \quad \varphi \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

We zien op deze manier dus dat er een geïsoleerde periodieke oplossing bestaat (dit heet een "limit cycle") voor $r = 1$. Wat gebeurt er met de oplossingen voor $0 < r < 1$? (vergelijk dit ook eens met je antwoord in

[1] zie het bestand DV2.pdf.

onderdeel b)!).[2]

d) Schets in het xy-vlak enkele oplossingskrommen voor $0 \leq r < 1$, $r = 1$ en $r > 1$.

Opdracht A2 $\leftrightarrow$ *Les 7 en Les 8* (20 punten)

Beschouw vervolgens het stelsel niet-lineaire DV-en:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y^{2n-1}, & n = 1, 2, 3, ... \\ \dot{y} = \ \ x^{2n-1}. & \end{cases} \tag{2}$$

a) De oorspong is het enige stationaire (kritieke) punt. Laat zien dat voor elke oplossing van stelsel (2) geldt:

$$x^{2n} + y^{2n} = \text{constant}.$$

D.w.z. de oplossingen van dit stelsel zijn gesloten (periodieke) krommen voor elke $n = 1, 2, 3, ...$

b) Welke eigenwaarden van de Jacobiaan vind je?[3]

c) Schets enkele oplossingen (krommen) in het xy-vlak voor $n = 2$ en vergelijk deze met de oplossingen voor $n = 1$.
Maak ook een schets van de oplossingen $x(t)$ en $y(t)$ voor deze twee gevallen.

d) Bespreek de verandering van de krommen voor toenemende waarden van n; wat verwacht je voor "$n \to \infty$"?

[2] Dit voorbeeld laat zien dat er een verschil kan zitten tussen het gelineariseerde en het oorspronkelijke niet-lineaire stelsel: let dus goed op i.h.a.!

[3] Let op: dit betekent dus dat, voor $n = 2, 3, ...$, geen van de, in de les besproken, oplossingen van het gelineariseerde stelsel hier gebruikt kunnen worden!

Opdracht B $\leftrightarrow$ *Les 10* (30 punten)

Beschouw de functies $f(x,y) = x^2 - y - \frac{1}{5}$ en $g(x,y) = y^2 - x - \frac{3}{10}$.

a) Schets de krommen $f(x,y) = 0$ en $g(x,y) = 0$ en beschrijf de methode van Newton-Raphson[4] voor het stelsel:

$$\begin{cases} f(x,y) = 0, \\ g(x,y) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Bepaal ook de Jacobi-matrix (Jacobiaan) voor dit stelsel.

b) Doe twee experimenten met de methode uit onderdeel a).
Kies voor experiment 1 als startwaarde $(x_0, y_0) = (1.2, 1.2)$ en voor experiment 2 als startwaarde $(x_0, y_0) = (-0.2, -0.2)$.
Bereken (x_1, y_1), (x_2, y_2) en (x_3, y_3) voor beide experimenten.
Maak voor beide experimenten tabellen met de iteratiewaarden (x_i, y_i) (in de tweede en derde kolom van de tabel) als functie van de index i (in de eerste kolom van de tabel).[5]
Convergeert de methode? Hoe zie je dat in de tabelwaarden?

c) Teken de berekende punten in de figuur uit onderdeel a).
Schets, m.b.v. pijlen, in deze figuur ook het iteratieve proces uit onderdeel b).

[4]zie het bestand NR.pdf.
[5]Geef de antwoorden in de tabellen in ZES cijfers achter de komma nauwkeurig!

Opdracht C $\leftrightarrow$ *Les 12* (30 punten)

Beschouw de volgende inhomogene differentiaalvergelijking (DV) van Airy:

$$y''(x) - \sin(x)\ y(x) = \mathrm{e}^{-x}, \quad y(0) = 1, \ \ y'(0) = 0. \tag{4}$$

a) Neem aan dat de oplossing geschreven kan worden als:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Bepaal de coëfficiënten a_n voor $n = 0, 1, 2, ...$ tot en met $n = 10$.

b) Schets de benaderende oplossing van DV (4)

$$\sum_{n=0}^{N} a_n x^n$$

op het interval $x \in [0, 5]$ voor oplopende waarden van N: $N = 1, 2, ..., 10$.